Početní část 1 - 22.2.2021

1. Označme
$$L = \lim_{x\to\infty} x^B \left(\sqrt[3]{x^4+x+1} - \sqrt[3]{x^4+x+A}\right).$$
Pokud $A = 1$, potom je výraz uvnitř limity roven 0 na okolí nekonečna (pro libovolné B), dále budeme uvažovat pouze případ $A \neq 1$. Potom za použití vzorečku $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (pro $a = \sqrt[3]{x^4+x+1}$ a $b = \sqrt[3]{x^4+x+A}$) dostáváme
$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty} x^B \cdot \frac{(\sqrt[3]{x^4+x+1})^3 - (\sqrt[3]{x^4+x+A})^3}{(\sqrt[3]{x^4+x+1})^2 + \sqrt[3]{x^4+x+1}\sqrt[3]{x^4+x+A} + (\sqrt[3]{x^4+x+A})^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^B \cdot \frac{x^4+x+1-x^4-x-A}{(\sqrt[3]{x^4+x+1})^2 + \sqrt[3]{x^4+x+1}\sqrt[3]{x^4+x+A} + (\sqrt[3]{x^4+x+A})^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^B}{x^{\frac{8}{3}}} \cdot \frac{1-A}{(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}})^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{A}{x^4}} + (\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{A}{x^4}})^2}
\end{aligned}$$
Platí
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^B}{x^{\frac{8}{3}}} = \begin{cases} \infty, & B > \frac{8}{3}, \\ 1, & B = \frac{8}{3}, \\ 0, & B < \frac{8}{3} \end{cases}$$
a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-A}{(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}})^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{A}{x^4}} + (\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{A}{x^4}})^2} = \frac{1-A}{3}.$$
Celkově tedy (za pomoci aritmetiky limit) dostáváme
$$L = \begin{cases} -\infty, & B > \frac{8}{3},\ A > 1, \\ \infty, & B > \frac{8}{3},\ A < 1, \\ \frac{1-A}{3}, & B = \frac{8}{3},\ A \in \mathbb{R}, \\ 0, & B < \frac{8}{3},\ A \in \mathbb{R}, \\ 0, & B \in \mathbb{R},\ A = 1. \end{cases}$$

2. Pro vyšetření definičního oboru si nejdřív připomeneme, že $D_{\log} = (0, \infty)$. Protože $x^2 - 4x < 0$ právě tehdy, když $x \in (0, 4)$ a

$$5 + (x^2 - 4x) = 1 + (x - 2)^2 \geq 1 > 0, \quad x \in (0, 4)$$

je určitě $(0, 4) \subset D_f$. Pro $x \notin (0, 4)$ potřebujeme $5 - x^2 + 4x > 0$, což dá navíc podmínku $x \in (-1, 5)$ a tedy $D_f = (-1, 5)$.

Asymptoty neexistují.

Pro budoucí výpočty si f napíšeme jako

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(5 + x^2 - 4x\right), & x \in (0, 4) \\ \log\left(5 - x^2 + 4x\right), & x \in (-1, 5) \setminus (0, 4) \end{cases}$$

Podle D_f hned vidíme, že f není sudá, lichá, ani periodická.

Rovněž je f spojitá na D_f (složení spojitých funkcí).

Spočteme ještě

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to 5-} f(x) = -\infty.$$

Dále spočítáme

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 5}, & x \in (0, 4) \\ \dfrac{2(x-2)}{x^2 - 4x - 5}, & x \in (-1, 0) \cup (4, 5) \end{cases}$$

Odtud dostaneme, že

$$f'(x) < 0 \iff x \in (0, 2) \cup (4, 5)$$

a

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (2, 4)$$

Tedy f je rostoucí na $(-1, 0)$ a $(2, 4)$ a klesající na $(0, 2)$ a $(4, 5)$. Bod 2 je bodem lokálního minima a body 0 a 4 josu body lokálního i globálního maxima (globální minimum neexistuje).

Ze spojitosti a limit v -1 a 5 dostáváme, že obor hodnot je $(-\infty, f(0)] = (-\infty, \log(5)]$ (ve skutečnosti se extrémy i obor hodnot daly uhádnout už z elementárních odhadů, co jsme dělali na začátku).

Dále (s využitím spojitosti v 0 a 4)

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \mp\frac{4}{5} \quad \text{a} \quad f'_{\pm}(4) = \lim_{x \to 4\pm} f'(x) = \mp\frac{4}{5}.$$

Navíc

$$\lim_{x \to -1+} f'(x) = \infty \quad \text{a} \lim_{x \to 5-} f'(x) = -\infty.$$

Spočítáme ještě druhou derivaci

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2\left(x^2-4x+3\right)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}, & x \in (0,4) \\ -\dfrac{2\left(x^2-4x+13\right)}{\left(x^2-4x-5\right)^2}, & x \in (-1,0) \cup (4,5) \end{cases}$$

Odtud vidíme, že $f''(x) = 0$ pro $x = 1, 3$ a

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (3,4) \cup (4,5)$$

a

$$f''(x) > 0 \iff x \in (1,3)$$

Dostáváme tedy, že f je konvexní na $(1,3)$ (a ze spojitosti na $[1,3]$). Dále, že f je konvexní na $(-1,0)$, $(0,1)$, $(3,4)$ a $(4,5)$, a díky jednostranným derivacím v 0 a 4 je f konvexní na $(-1,1]$ a $[3,5)$. Inflexní body jsou 1 a 3.